第5講　$\cos\frac{2}{5}\pi$ の求め方

5　$\theta=\frac{2}{5}\pi$ として，次の問いに答えよ．

(1)　$\cos 3\theta=\cos 2\theta$ であることを示し，$\cos\theta$ の値を求めよ．

(2)　$\angle\mathrm{B}=\angle\mathrm{C}=\theta$，$\mathrm{AB}=\mathrm{AC}=1$ を満たす三角形ABCにおいて，$\angle\mathrm{B}$ の二等分線と辺ACの交点をDとする．CDの長さを利用して $\cos\theta$ の値を求めよ．

(3)　$\overrightarrow{x_j}=(\cos j\theta,\ \sin j\theta)$ $(j=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$ を考えることにより，$\cos\theta$ の値を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第5講　$\cos\frac{2}{5}\pi$ の求め方

5　次の空欄を適切な数でうめよ．

$\sin 36^\circ = a$ とおくと

$$\cos 72^\circ = \boxed{} - \boxed{}\, a^2$$

$$\sin 108^\circ = -\boxed{}\, a^3 + \boxed{}\, a$$

であり

$$\sin 180^\circ = \boxed{}\, a^5 - 20a^3 + \boxed{}\, a$$

となる．これより

$$a = \sqrt{\frac{5-\sqrt{\boxed{}}}{\boxed{}}}$$

を得る．

【選択肢】

㋐　上から順に　2，4，3，16，5，5，8，1

㋑　上から順に　1，2，4，3，16，5，5，8

㋒　上から順に　16，5，5，8，1，2，4，3

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第５講　$\cos\frac{2}{5}\pi$ の求め方

$\boxed{5}$　$\theta=\dfrac{2}{5}\pi$ として，次の問いに答えよ．

(1)　$\cos 3\theta=\cos 2\theta$ であることを示し，$\cos\theta$ の値を求めよ．

(2)　$\angle B=\angle C=\theta$，$AB=AC=1$ を満たす三角形 ABC において，$\angle B$ の二等分線と辺 AC の交点を D とする．CD の長さを利用して $\cos\theta$ の値を求めよ．

(3)　$\overrightarrow{x_j}=(\cos j\theta,\ \sin j\theta)$ $(j=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$ を考えることにより，$\cos\theta$ の値を求めよ．

【答】 (1)，(2)，(3)ともに $\cos\theta=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$

【解答】

(1)　$\theta=\dfrac{2}{5}\pi$ より $5\theta=2\pi$ であるので $3\theta=2\pi-2\theta$　このとき

$$\cos 3\theta=\cos(2\pi-2\theta)=\cos 2\theta$$

となる．ここで $\cos\theta=t$ とおくと，$\cos 3\theta=4t^3-3t$，$\cos 2\theta=2t^2-1$ より $\cos 3\theta=\cos 2\theta$ は $4t^3-3t=2t^2-1$ となる．これを整理すると

$$(t-1)(4t^2+2t-1)=0$$

ここで $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より $0<t=\cos\theta<1$ であるので，$t=\boldsymbol{\cos\theta=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}}$

(2)　BD は $\angle B$ の二等分線より $\angle DBC=\dfrac{\theta}{2}$

また，$\angle DBA=\dfrac{\theta}{2}$ と $\angle A=\dfrac{\theta}{2}$ より三角形 DAB は $AD=BD$ の二等辺三角形となり，$\angle BDC=\theta$ より三角形 BCD は $BD=BC$ の二等辺三角形となる．

よって，$CD=x$ とおくと，$AD=BD=BC=1-x$ となり，三角形 BCD と三角形 ABC が相似であるので，$AB:BC=BC:CD$ より $1:(1-x)=(1-x):x$ すなわち $(1-x)^2=x$

これと $0<x<1$ より　$x^2-3x+1=0$　ゆえに　$x=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$

よって，$\cos\theta=\dfrac{\frac{1}{2}BC}{AB}=\dfrac{1}{2}(1-x)=\boldsymbol{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}}$

(3)　$\overrightarrow{x_1}$ と $\overrightarrow{x_0}$ のなす角と $\overrightarrow{x_4}$ と $\overrightarrow{x_0}$ のなす角はともに θ であるから，$\overrightarrow{x_1}+\overrightarrow{x_4}=(2\cos\theta)\overrightarrow{x_0}$ と表せ，$\overrightarrow{x_2}$ と $\overrightarrow{x_0}$ のなす角と $\overrightarrow{x_3}$ と $\overrightarrow{x_0}$ のなす角はともに 2θ であるから，$\overrightarrow{x_2}+\overrightarrow{x_3}=(2\cos 2\theta)\overrightarrow{x_0}$ と表せるので，$\overrightarrow{x_0}+\overrightarrow{x_1}+\overrightarrow{x_2}+\overrightarrow{x_3}+\overrightarrow{x_4}=(2\cos 2\theta+2\cos\theta+1)\overrightarrow{x_0}$　……①

また $\overrightarrow{x_2}$ と $\overrightarrow{x_1}$ のなす角と $\overrightarrow{x_0}$ と $\overrightarrow{x_1}$ のなす角はともに θ であるから，$\overrightarrow{x_2}+\overrightarrow{x_0}=(2\cos\theta)\overrightarrow{x_1}$ と表せ，$\overrightarrow{x_3}$ と $\overrightarrow{x_1}$ のなす角と $\overrightarrow{x_4}$ と $\overrightarrow{x_1}$ のなす角はともに 2θ であるから，$\overrightarrow{x_3}+\overrightarrow{x_4}=(2\cos 2\theta)\overrightarrow{x_1}$ と表せるので，$\overrightarrow{x_0}+\overrightarrow{x_1}+\overrightarrow{x_2}+\overrightarrow{x_3}+\overrightarrow{x_4}=(2\cos 2\theta+2\cos\theta+1)\overrightarrow{x_1}$　……②

①と②より $2\cos 2\theta+2\cos\theta+1=0$ すなわち $4\cos^2\theta+2\cos\theta-1=0$

ゆえに，$\boldsymbol{\cos\theta=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}}$ を得る．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第5講　$\cos\frac{2}{5}\pi$ の求め方

5　次の空欄を適切な数でうめよ．

$\sin 36^\circ = a$ とおくと

$$\cos 72^\circ = \boxed{} - \boxed{}\,a^2$$

$$\sin 108^\circ = -\boxed{}\,a^3 + \boxed{}\,a$$

であり

$$\sin 180^\circ = \boxed{}\,a^5 - 20a^3 + \boxed{}\,a$$

となる．これより

$$a = \sqrt{\frac{5-\sqrt{\boxed{}}}{\boxed{}}}$$

を得る．

【選択肢】

㋐　上から順に　2，4，3，16，5，5，8，1

㋑　上から順に　1，2，4，3，16，5，5，8

㋒　上から順に　16，5，5，8，1，2，4，3

【答】　㋑

【解答】

$36^\circ = \theta$ とおくと，$\sin\theta = a$

$$\cos 72^\circ = \cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta = \mathbf{1} - \mathbf{2}a^2$$

$$\sin 108^\circ = \sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta = -\mathbf{4}a^3 + \mathbf{3}a$$

ここで

$$\begin{aligned}\cos 3\theta \sin 2\theta &= (4\cos^3\theta - 3\cos\theta)\cdot 2\sin\theta\cos\theta \\ &= 2\sin\theta(4\cos^2\theta - 3)\cos^2\theta \\ &= 2a\{4(1-a^2)-3\}(1-a^2) \\ &= 8a^5 - 10a^3 + 2a\end{aligned}$$

となるので

$$\begin{aligned}\sin 180^\circ &= \sin 5\theta = \sin(3\theta + 2\theta) \\ &= \sin 3\theta\cos 2\theta + \cos 3\theta \sin 2\theta \\ &= (-4a^3+3a)(1-2a^2) + 8a^5 - 10a^3 + 2a \\ &= \mathbf{16}a^5 - 20a^3 + \mathbf{5}a\end{aligned}$$

$\sin 180^\circ = 0$ より $16a^5 - 20a^3 + 5a = 0$ となるが，$a \neq 0$ より $16a^4 - 20a^2 + 5 = 0$

$$\therefore\quad a^2 = \frac{5\pm\sqrt{5}}{8}$$

さらに，$0 < a = \sin 36^\circ < \sin 45^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$a^2 < \dfrac{1}{2}$ であるから，$a = \sqrt{\dfrac{\mathbf{5}-\sqrt{\mathbf{5}}}{\mathbf{8}}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。